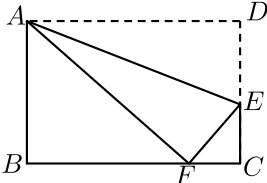
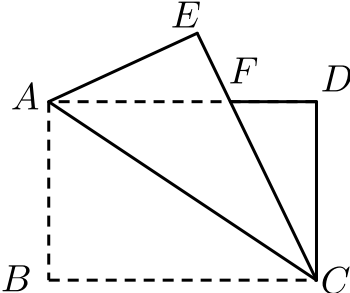
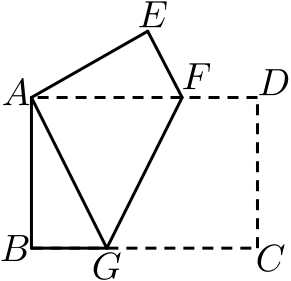
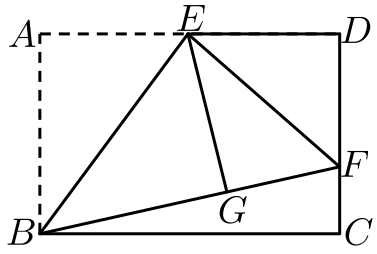
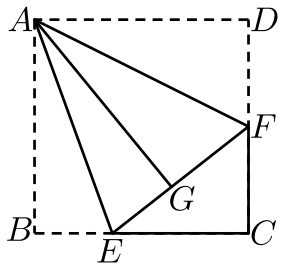
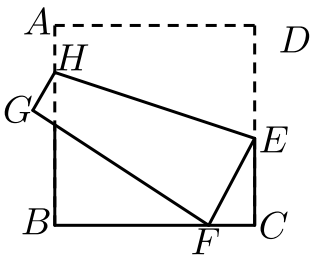


第2讲 四边形中的折叠问题

一、矩形的翻折

轴对称的性质：①对称轴两侧图形_____；②对应点连线被对称轴_____.

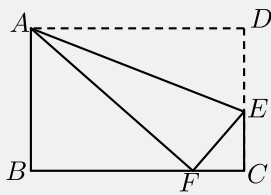
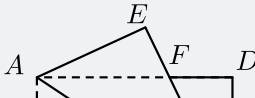
常见模型	结论
	
	
	

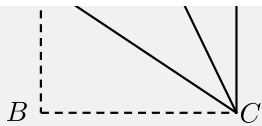
E为AD的中点 	
	
	

【教法备注】

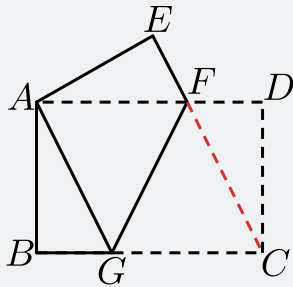
轴对称的性质：①对称轴两侧图形全等；②对应点连线被对称轴垂直平分。

翻折问题解题技巧：把握折叠前后的不变量是关键，字母化（设元）、建立方程（勾股定理）、数形结合、必要时从动手操作中寻找答案，这是解决折叠问题的常用技巧。

常见模型	结论
	$\triangle AFE \cong \triangle ADE$ $AF = AD, EF = DE$
	$\triangle AEF \cong \triangle CDF$



$$EF = DF, AF = CF$$

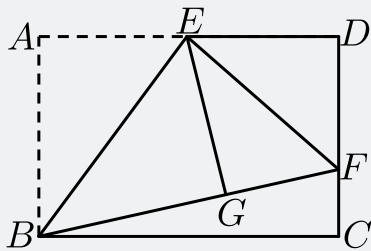


$$\triangle AEF \cong \triangle ABG \cong \triangle CDF$$

$$AF = AG = CF$$

四边形 $AGCF$ 为菱形

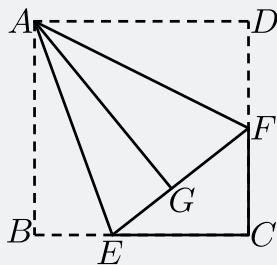
E 为 AD 的中点



$$\triangle BAE \cong \triangle BGE$$

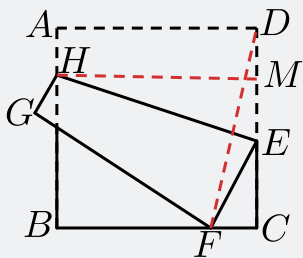
$$\triangle EDF \cong \triangle EGF$$

$$BE^2 + EF^2 = BF^2$$



$$\triangle ABE \cong \triangle AGE$$

$$\triangle AGF \cong \triangle ADF$$

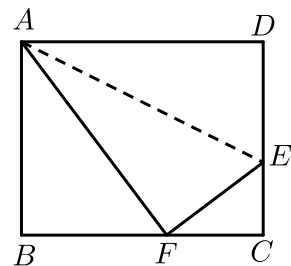


$$\Delta HME \cong \Delta DCF$$

$$HE = DF$$

 例题

1. 如图，矩形纸片 $ABCD$ 进行折纸，已知该纸片宽 AB 为 8cm ，长 BC 为 10cm ，当沿 AE 折叠时，顶点 D 落在 BC 边上的点 F 处，试求 CE 的长．



【答案】 3cm .

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形 ,

$$\therefore AD = BC = 10, DC = AB = 8, \angle B = \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

$\because$ 沿 AE 折叠时 , 顶点 D 落在 BC 边上的点 F 处 ,

$$\therefore AF = AD = 10, DE = EF,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$\therefore CF = BC - BF = 10 - 6 = 4,$$

$$\text{设 } CE = x, \text{ 则 } DE = EF = 8 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CEF \text{ 中, } \because CF^2 + CE^2 = EF^2,$$

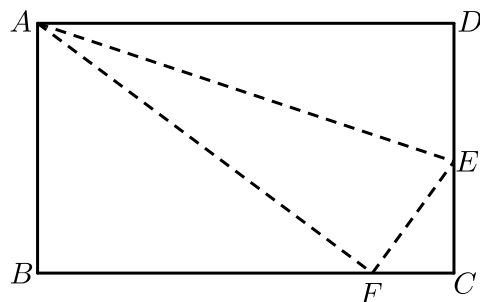
$$\therefore 4^2 + x^2 = (8 - x)^2, \text{ 解得 } x = 3,$$

即 CE 的长为 3cm .

【标注】 【知识点】 翻折问题与勾股定理

练习

2. 如图 , 在长方形 $ABCD$ 中 , $DC = 6\text{cm}$, 在 DC 上存在一点 E 、沿直线 AE 把 $\triangle ADE$ 折叠 , 使点 D 恰好落在 BC 边上的点 F 处 , 若 $BF = 8\text{cm}$, 那么 DE 的长为 _____ cm .



【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形 ,

$$\therefore AD = AF, AD = BC, \angle B = \angle C = 90^\circ, AB = DC = 6\text{cm},$$

$$\therefore BF = 8\text{cm}, AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = 10\text{cm},$$

$$\therefore AD = AF = 10\text{cm}$$

$$\text{又} \because DE = EF, EC = 6 - DE, FC = BC - BF = 2\text{cm},$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle EFC\text{中}, EF = \sqrt{EC^2 + FC^2},$$

$$\therefore DE = \sqrt{(6 - DE)^2 + 2^2},$$

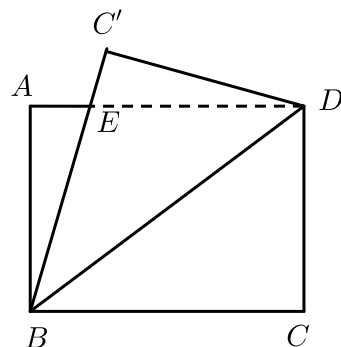
$$\therefore DE = \frac{10}{3}\text{cm}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{10}{3}.$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

|| 例题

3. 如图，将长方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 所在直线折叠，点 C 落在同一平面内，落点记为 C' ， BC' 与 AD 交于点 E ，若 $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，则 DE 的长为 _____ .



【答案】 $\frac{25}{8}$

【解析】由折叠得， $\angle CBD = \angle EBD$ ，

由 $AD \parallel BC$ 得， $\angle CBD = \angle EDB$ ，

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB,$$

$$\therefore DE = BE,$$

设 $DE = BE = x$ ，则 $AE = 4 - x$ ，

$$\text{在Rt}\triangle ABE\text{中}, AE^2 + AB^2 = BE^2, (4 - x)^2 + 3^2 = x^2,$$

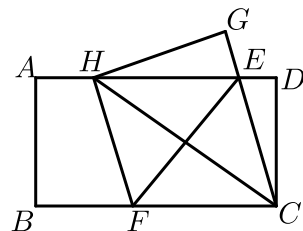
$$\text{解得} x = \frac{25}{8},$$

$$\therefore DE\text{的长为} \frac{25}{8}.$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

4. 如图，在一张矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 8$ ，点 E ， F 分别在 AD ， BC 上，将纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠，点 C 落在 AD 上的一点 H 处，点 D 落在点 G 处，有以下四个结论：
 ①四边形 $CFHE$ 是菱形；②当 $CH = CB$ 时， EC 平分 $\angle DCH$ ；③当点 H 是 AD 中点时， $EF = 4\sqrt{3}$ ；④当点 H 与点 A 重合时， $BF = 3$ 。

其中正确的结论是（ ）。



A. ①②③

B. ②③④

C. ①③④

D. ①②④

【答案】 D

【解析】 $\because FH$ 与 CG 、 EH 与 CF ，

都是矩形 $ABCD$ 的对边 AD 、 BC 的一部分，

$\therefore FH \parallel CG$ ， $EH \parallel CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $CFHE$ 是平行四边形，

由翻折得， $CF = FH$ ，

$\therefore$ 四边形 $CFHE$ 是菱形， $\therefore$ ①正确。

当 $CH = CB$ 时， $\sin \angle DHC = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \angle DHC = \angle DCE = 30^\circ$ ， $\therefore EC$ 平分 $\angle DCH$ ，②正确。

过 F 作 $FM \perp AD$ 于 M ，

则 $ME = (8 - 3) - 3 = 2$ ，

由勾股， $EF = \sqrt{MF^2 + ME^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ， $\therefore$ ③错误。

点 H 与 A 重合时，则 $BF = x$ ， $AF = FC = 8 - x$ ，

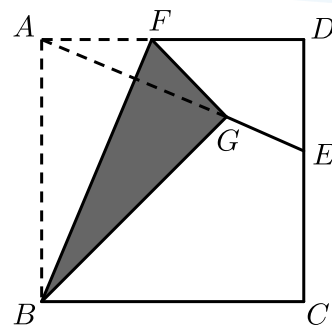
Rt $\triangle ABF$ 中， $AB^2 + BF^2 = AF^2$ ，

$4^2 + x^2 = (8 - x)^2$ ，

$\therefore x = 3$ ，④正确。

【标注】 【知识点】 四边形与折叠问题

5. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为12， E 是边 CD 上一点，连接 AE ，折叠该纸片，使点 A 落在 AE 上的 G 点，并使折痕经过点 B ，得到折痕 BF ，点 F 在 AD 上，若 $DE = 5$ ，则 GE 的长为 _____。



【答案】 $\frac{49}{13}$

【解析】 设 BF 与 AG 交于点 H ,

由折叠性质可知 ,

$AG \perp BF$,

$\therefore \angle AHF = 90^\circ$,

$\therefore \angle AFH + \angle FAH = 90^\circ$,

又 $\because \angle DEA + \angle FAH = 90^\circ$,

$\therefore \angle AFH = \angle DEA$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$\therefore AB = CD$,

$\angle BAF = \angle ADE = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AFB \cong \triangle DEA$ (AAS) ,

$\therefore DE = 5$,

$\therefore AF = DE = 5$,

$\therefore BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$,

$\therefore \angle AHF = \angle FAB = 90^\circ$,

$\angle AFH = \angle AFB$,

$\therefore \triangle AFH \sim \triangle BFA$,

$\therefore \frac{AH}{BA} = \frac{AF}{BF}$,

即 $\frac{AH}{12} = \frac{5}{13}$,

$\therefore AH = \frac{60}{13}$,

$\therefore AG = 2AH = 2 \times \frac{60}{13} = \frac{120}{13}$,

$\therefore AD = 12$,

$DE = 5$,

$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$,

$\therefore GE = AE - AG = 13 - \frac{120}{13} = \frac{49}{13}$.

【标注】【知识点】正方形的性质

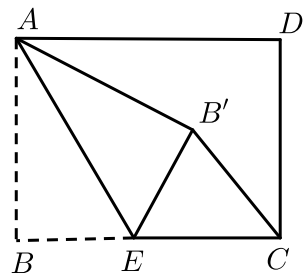
【知识点】相似三角形的性质

【知识点】翻折问题与勾股定理

【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，点 E 是 BC 边上一点，连接 AE ，把 $\angle B$ 沿 AE 折叠，使点 B 落在点 B' 处．当 $\triangle CEB'$ 为直角三角形时， BE 的长为 _____ ．



【答案】 $\frac{3}{2}$ 或3

【解析】当 $\triangle CEB'$ 为直角三角形时，有两种情况：

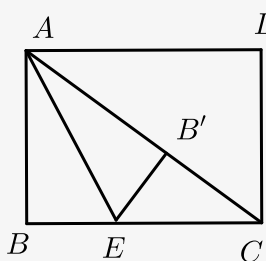


图 1

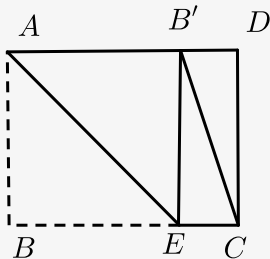


图 2

①当点 B' 落在矩形内部时，如图1所示．

连接 AC ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$\therefore \angle B$ 沿 AE 折叠，使点 B 落在点 B' 处，

$$\therefore \angle AB'E = \angle B = 90^\circ,$$

当 $\triangle CEB'$ 为直角三角形时，只能得到 $\angle EB'C = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 点 A 、 B' 、 C 共线，即 $\angle B$ 沿 AE 折叠，使点 B 落在对角线 AC 上的点 B' 处，

$$\therefore EB = EB', AB = AB' = 3,$$

$$\therefore CB' = 5 - 3 = 2,$$

设 $BE = x$ ，则 $EB' = x$ ， $CE = 4 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CEB'$ 中, $\because EB'^2 + CB'^2 = CE^2$,
 $\therefore x^2 + 2^2 = (4-x)^2$, 解得 $x = \frac{3}{2}$,
 $\therefore BE = \frac{3}{2}$;

②当点 B' 落在 AD 边上时, 如图2所示.

此时四边形 $ABEB'$ 为正方形, $\therefore BE = AB = 3$.

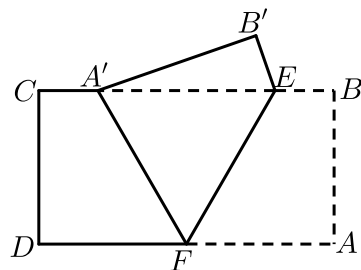
综上所述, BE 的长为 $\frac{3}{2}$ 或 3 .

故答案为: $\frac{3}{2}$ 或 3 .

【标注】【知识点】四边形与折叠问题

练习

7. 如图, 把矩形纸片 $ABCD$ 沿 EF 翻折, 点 A 恰好落在 BC 边的 A' 处, 若 $AB = \sqrt{3}$, $\angle EFA = 60^\circ$, 则四边形 $A'B'EF$ 的周长是 ().



A. $1 + 3\sqrt{3}$

B. $3 + \sqrt{3}$

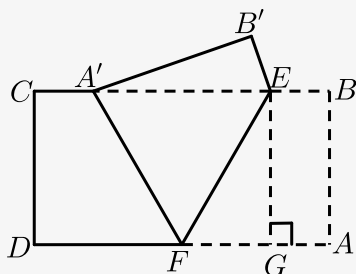
C. $4 + \sqrt{3}$

D. $5 + \sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】 如图,

过点 E 作 $EG \perp AD$, 交 AD 于 G ,



$\therefore \angle AGE = \angle FGE = 90^\circ$

$\because$ 矩形纸片 $ABCD$,

$\therefore \angle A = \angle B = \angle AGE = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABEG$ 是矩形,

$$\therefore BE = AG, EG = AB = \sqrt{3}.$$

在Rt△EFG中, $\angle EFG = 60^\circ$, $EG = \sqrt{3}$,

$$\therefore FG = 1, EF = 2,$$

由折叠知, $AF' = AF$, $A'B' = AB = \sqrt{3}$, $BE = B'E$, $\angle A'FE = \angle AFE = 60^\circ$

.

$$\therefore BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle A'EF = \angle AFE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle A'EF$ 是等边三角形,

$$\therefore A'F = EF = 2,$$

$$\therefore AF = A'F = 2,$$

$$\therefore BE = AG = AF - FG = 2 - 1 = 1,$$

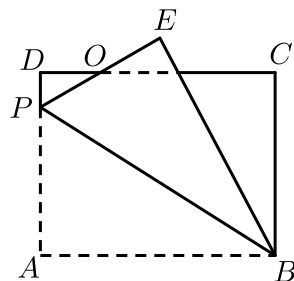
$$\therefore B'E = 1,$$

$$\therefore \text{四边形 } A'B'EF \text{ 的周长是 } A'B' + B'E + EF + A'F = \sqrt{3} + 1 + 2 + 2 = 5 + \sqrt{3},$$

故选D.

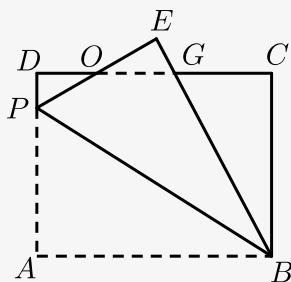
【标注】【知识点】四边形与折叠问题

8. 如图, 矩形ABCD中, $AB = 8$, $BC = 6$, P为AD上一点, 将△ABP沿BP翻折至△EBP, PE与CD相交于点O, 且 $OE = OD$, 则DP的长为 _____.



【答案】 1.2

【解析】 如图所示:



$\therefore$ 四边形ABCD是矩形,

$$\therefore \angle D = \angle A = \angle C = 90^\circ, AD = BC = 6, CD = AB = 8,$$

根据题意得： $\triangle ABP \cong \triangle EBP$,

$$\therefore EP = AP, \angle E = \angle A = 90^\circ, BE = AB = 8,$$

在 $\triangle ODP$ 和 $\triangle OEG$ 中，

$$\begin{cases} \angle D = \angle E \\ OD = OE \\ \angle DOP = \angle EOG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ODP \cong \triangle OEG \text{ (ASA)},$$

$$\therefore OP = OG, PD = GE,$$

$$\therefore DG = EP,$$

$$\text{设 } AP = EP = x, \text{ 则 } PD = GE = 6 - x, DG = x,$$

$$\therefore CG = 8 - x, BG = 8 - (6 - x) = 2 + x,$$

$$\text{根据勾股定理得：} BC^2 + CG^2 = BG^2,$$

$$\text{即 } 6^2 + (8 - x)^2 = (x + 2)^2,$$

$$\text{解得：} x = 4.8,$$

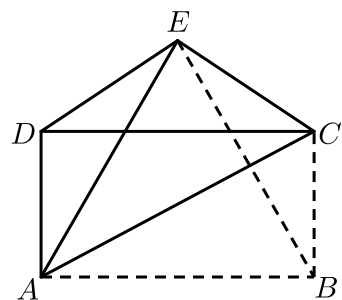
$$\therefore AP = 4.8,$$

$$DP = 6 - x = 6 - 4.8 = 1.2,$$

故答案为：1.2.

【标注】【知识点】勾股定理与几何问题

9. 如图，已知矩形 $ABCD$ ，把矩形沿直线 AC 折叠，点 B 落在点 E 处，连接 DE 、 BE ，若 $\triangle ABE$ 是等边三角形，则 $\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ABE}} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 过 E 作 $EM \perp AB$ 于 M ，交 DC 于 N ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore DC = AB, DC \parallel AB, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore MN = BC,$$

$\therefore EN \perp DC$,

$\therefore$ 延 AC 折叠 B 和 E 重合, $\triangle AEB$ 是等边三角形,

$\therefore \angle EAC = \angle BAC = 30^\circ$,

设 $AB = AE = BE = 2a$, 则 $BC = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}a$,

即 $MN = \frac{2}{3}\sqrt{3}a$,

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形, $EM \perp AB$,

$\therefore AM = a$, 由勾股定理得: $EM = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$,

$\therefore \triangle DCE$ 的面积是 $\frac{1}{2} \times DC \times EN = \frac{1}{2} \times 2a \times \left(\sqrt{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{3}a \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$,

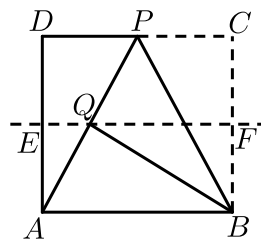
$\triangle ABE$ 的面积是 $\frac{1}{2} AB \times EM = \frac{1}{2} \times 2a \times \sqrt{3}a = \sqrt{3}a^2$,

$\therefore \frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a^2}{\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{3}$,

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【标注】【知识点】三角形折叠

10. 如图, 直线 EF 是矩形 $ABCD$ 的对称轴, 点 P 在 CD 边上, 将 $\triangle BCP$ 沿 BP 折叠, 点 C 恰好落在线段 AP 与 EF 的交点 Q 处, $BC = 4\sqrt{3}$, 则线段 AB 的长是 _____.



【答案】8

【解析】因为直线 EF 是矩形 $ABCD$ 的对称轴,

所以 $EF \parallel CD$, $AE = \frac{1}{2}AD$,

所以 $\triangle AEQ \sim \triangle ADP$,

所以 $\frac{AQ}{AP} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}$,

所以 $AQ = PQ$.

因为 $\triangle BQP$ 是由 $\triangle BCP$ 翻折得来的,

所以 $\angle PQB = \angle C = 90^\circ$, $\angle PBC = \angle PBQ$.

所以 $BQ \perp AP$.

所以 BQ 是 AP 的垂直平分线，

所以 $BA = BP$.

因为 $BQ \perp AP$,

所以 BQ 平分 $\angle ABP$,

所以 $\angle ABQ = \angle PBQ$.

因为 $\angle PBC = \angle PBQ$,

所以 $\angle ABQ = \angle PBQ = \angle PBC$.

因为 $\angle ABQ + \angle PBQ + \angle PBC = \angle ABC = 90^\circ$,

所以 $\angle PBC = 30^\circ$.

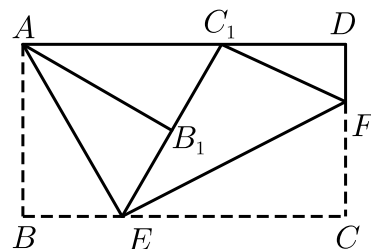
所以在 $\text{Rt}\triangle PCB$ 中, $BP = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = 8$,

所以 $BA = BP = 8$.

【标注】【知识点】其它翻折问题

|| 例题

11. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠， AE ， EF 为折痕， $\angle BAE = 30^\circ$ ， $AB = \sqrt{3}$ ，折叠后，点 C 落在 AD 边上的 C_1 处，并且点 B 落在 EC_1 边上的 B_1 处，则 BC 的长为（ ） .



A. $\sqrt{3}$

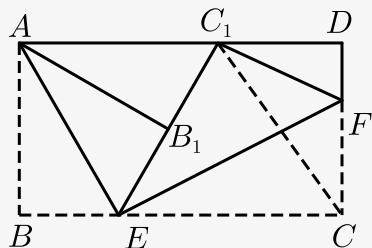
B. 2

C. 3

D. $2\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 连接 CC_1 ，



在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $\angle BAE = 30^\circ$ ， $AB = \sqrt{3}$ ，

$\therefore BE = AB \times \tan 30^\circ = 1$ ， $AE = 2$ ， $\angle AEB_1 = \angle AEB$ ，

又 $AD \parallel BC$ ，那么 $\angle C_1AE = \angle AEB = 60^\circ$ ，

所以 $\triangle AEC_1$ 为等边三角形，

那么 $\triangle CC_1E$ 也为等边三角形，

那么 $EC = EC_1 = AE = 2$ ，

$\therefore BC = BE + EC = 3$ 。

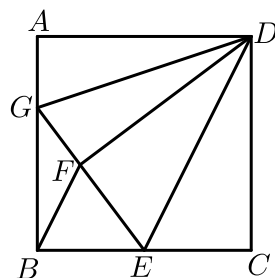
故选C。

【标注】【知识点】矩形的性质

【知识点】等边三角形的性质

【能力】推理论证能力

12. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为12， $BE = EC$ ，将正方形 CD 沿 DE 折叠到 DF ，延长 EF 交 AB 于 G ，连接 DG 。现在有如下4个结论：(1) $\triangle ADG \cong \triangle FDG$ ；(2) $GB = 2AG$ ；(3) $\angle FBE = \angle DGE$ ；(4) $S_{\triangle BEF} = \frac{72}{5}$ 。在以上4个结论中，正确的有()。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】① $\because \triangle DFE$ 由 $\triangle DCE$ 沿 DE 折叠得到，

$\therefore DF = DC$ ， $\angle DFE = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADG$ 和 $\text{Rt}\triangle FDG$ 中， $\begin{cases} DG = DG \\ DA = DF \end{cases}$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ADG \cong \text{Rt}\triangle FDG$ (HL)，

$\therefore$ ①正确。

②设 $AG = x$ ， $GB = 12 - x$ ，

$\therefore GF = GA = x$ ，

又 $\because E$ 为 BC 中点，

$\therefore BE = EC = 6$ ，

$\therefore EF = EC = 6$ ，

$\therefore EG = 6 + x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BEG$ 中, $EG^2 = BG^2 + BE^2$,

$$\therefore (6+x)^2 = (12-x)^2 + 6^2,$$

$$x = 4,$$

$$\therefore AG = x = 4,$$

$$BG = 12 - x = 8,$$

$$\therefore GB = 2AG,$$

$\therefore$ ②正确.

$$\textcircled{3} \because EF = EC = BE,$$

$\therefore \triangle BEF$ 是等腰三角形,

$$\text{又} \because DE = \sqrt{DC^2 + EC^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5},$$

$$DG = \sqrt{AD^2 + AG^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10},$$

$$GE = GF + EF = 10,$$

$$\therefore DE \neq DG \neq GE,$$

$\therefore \triangle DGE$ 不是等腰三角形,

$$\therefore \angle FBE \neq \angle DGE,$$

$\therefore$ ③错误.

④如图, 作 $FH \perp BE$ 于点 H , 则 $FH \parallel GB$,

$$\therefore \angle FHE = \angle GBE, \angle EFH = \angle EGB,$$

$$\therefore \triangle EFH \sim \triangle EGB,$$

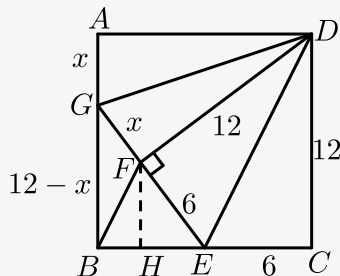
$$\therefore \frac{FH}{GB} = \frac{EF}{EG},$$

$$\therefore FH = \frac{EF}{EG} \cdot GB$$

$$= \frac{6}{10} \times 8 = \frac{24}{5},$$

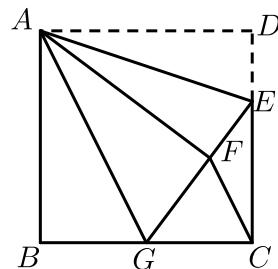
$$\therefore S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot FH = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{24}{5} = \frac{72}{5}.$$

$\therefore$ ④正确.



【标注】【知识点】正方形与全等综合

13. 如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ，点 E 在边 CD 上，且 $CE = 2DE$ 。将 $\triangle ADE$ 沿 AE 对折至 $\triangle AFE$ ，延长 EF 交边 BC 于点 G ，连结 AG 、 CF 。下列结论：① $\triangle ABG \cong \triangle AFG$ ；② $BG = GC$ ；③ $EG = DE + BG$ ；④ $AG \parallel CF$ ；⑤ $S_{\triangle FGC} = 3.6$ 。其中正确结论的个数是（ ）。



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】D

【解析】 $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为6， $CE = 2DE$ ，

$$\therefore DE = 2, EC = 4,$$

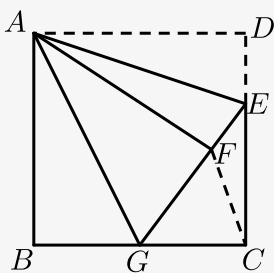
$\therefore$ 把 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠使 $\triangle ADE$ 落在 $\triangle AFE$ 的位置，

$$\therefore AF = AD = 6, EF = ED = 2, \angle AFE = \angle D = 90^\circ, \angle FAE = \angle DAE,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 和 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中

$$\begin{cases} AB = AF \\ AG = AG \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABG \cong \text{Rt}\triangle AFG \text{ (HL)},$$



$$\therefore GB = GF, \angle BAG = \angle FAG,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle FAE + \angle FAG = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ, \text{ 所以①正确；}$$

$$\text{设 } BG = x, \text{ 则 } GF = x, C = BC - BG = 6 - x,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle CGE \text{ 中, } GE = x + 2, EC = 4, CG = 6 - x,$$

$$\therefore CG^2 + CE^2 = GE^2,$$

$$\therefore (6 - x)^2 + 4^2 = (x + 2)^2, \text{ 解得 } x = 3,$$

$$\therefore BG = 3, CG = 6 - 3 = 3$$

$$\therefore BG = CG, \text{ 所以②正确；}$$

$$\therefore EF = ED, GB = GF,$$

$\therefore GE = GF + EF = BG + DE$, 所以③正确 ;

$\therefore GF = GC$,

$\therefore \angle GFC = \angle GCF$,

又 $\therefore \text{Rt}\triangle ABG \cong \text{Rt}\triangle AFG$,

$\therefore \angle AGB = \angle AGF$,

而 $\angle BGF = \angle GFC + \angle GCF$,

$\therefore \angle AGB + \angle AGF = \angle GFC + \angle GCF$,

$\therefore \angle AGB = \angle GCF$,

$\therefore CF \parallel AG$, 所以④正确 ;

过 F 作 $FH \perp DC$

$\therefore BC \perp DH$,

$\therefore FH \parallel GC$,

$\therefore \triangle EFH \sim \triangle EGC$,

$\therefore \frac{EH}{GC} = \frac{EF}{EG}$,

$EF = DE = 2$, $GF = 3$,

$\therefore EG = 5$,

$\therefore \triangle EFH \sim \triangle EGC$,

$\therefore$ 相似比为 : $\frac{EH}{GC} = \frac{EF}{EG} = \frac{2}{5}$,

$\therefore S_{\triangle FGC} = S_{\triangle GCE} - S_{\triangle FEC}$
 $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{2}{5} \times 3\right)$
 $= \frac{18}{5}$
 $= 3.6$,

所以⑤正确 .

故正确的有①②③④⑤ .

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

14. 如图 , 在矩形纸片 $ABCD$ 中 , $AB = 6$, $BC = 10$, 点 E 在 CD 上 , 将 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠 , 点 C 恰落在边 AD 上的点 F 处 . 点 G 在 AF 上 , 将 $\triangle ABG$ 沿 BG 折叠 , 点 A 恰落在线段 BF 上的点 H 处 , 有下列结论 :

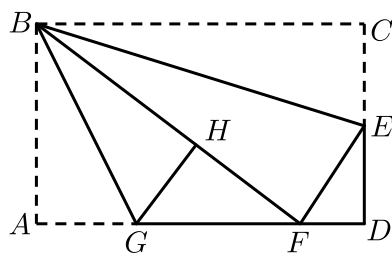
① $\angle EBG = 45^\circ$.

② $S_{\triangle ABG} = \frac{3}{2} S_{\triangle FGH}$.

③ $AG + DF = FG$.

$$\textcircled{4} \frac{CE}{ED} = \frac{5}{4}.$$

其中，正确结论的个数是（ ）.



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 $\because \triangle BCE$ 沿 BE 折叠，点 C 恰落在边 AD 上的点 F 处， G 在 AF 上，

将 $\triangle ABG$ 沿 BG 折叠，点 A 恰落在线段 BF 上的 H 处.

$\therefore \angle CBE = \angle FBE$, $\angle ABG = \angle FBG$, $BF = BC = 10$, $BH = BA = 6$,
 $AG = GH$,

$\therefore \angle EBG = \angle EBF + \angle FBG = \frac{1}{2} \angle CBF + \frac{1}{2} \angle ABF = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore \textcircled{1}$ 正确.

在 $\text{Rt} \triangle ABF$ 中, $AF = \sqrt{BF^2 - AB^2} = 8$,

$\therefore DF = AD - AF = 10 - 8 = 2$.

设 $AG = x$, 则 $GH = x$, $GF = 8 - x$, $HF = BF - BH = 10 - 6 = 4$,

在 $\text{Rt} \triangle GFH$ 中, $\therefore GH^2 + HF^2 = FG^2$,

$\therefore x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$.

解得 $x = 3$,

$\therefore GF = 5$,

$\therefore AG + DF = FG = 5$, $\textcircled{3}$ 正确.

$\therefore S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$,

$S_{\triangle GHF} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$,

$\therefore S_{\triangle ABG} = \frac{3}{2} S_{\triangle FGH}$, $\textcircled{2}$ 正确.

$AG = 3$, $GF = 5$, $DF = 10 - 3 - 5 = 2$,

设 $DE = x$, $CE = EF = 6 - x$,

在 $\text{Rt} \triangle EFD$ 中,

$2^2 + x^2 = (6 - x)^2$,

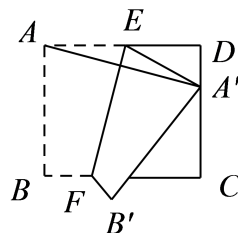
$x = \frac{8}{3}$,

$$\begin{aligned}\therefore DE &= \frac{8}{3}, \\ CE &= \frac{10}{3}, \\ \therefore \frac{CE}{DE} &= \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{5}{4}, \text{ 故④正确.} \\ \therefore \text{①②③④, 正确的个数有4个.}\end{aligned}$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

例题

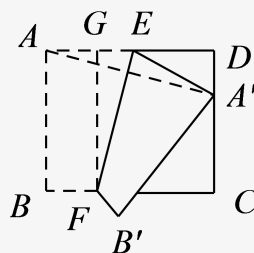
15. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 12， E 、 F 分别是边 AD 、 BC 上的点，将正方形纸片沿 EF 折叠，使得点 A 落在 CD 边上的点 A' 处，此时点 B 落在点 B' 处，已知折痕 $EF = 13$ ，则 AE 的长等于 _____ .



【答案】 $\frac{169}{24}$

【解析】 过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G ，连接 AA' .

在 $\text{Rt}\triangle EFG$ 中，



$$EG = \sqrt{EF^2 - FG^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 .$$

$\because$ 轴对称性质可知 $AA' \perp EF$,

$$\therefore \angle EAH + \angle AEH = 90^\circ .$$

$\because FG \perp AD$,

$$\therefore \angle GEF + \angle EFG = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAA' = \angle GFE .$$

在 $\triangle GEF$ 和 $\triangle DA'A$ 中 .

$$\begin{cases} \angle EGF = \angle D = 90^\circ \\ FG = AD \\ \angle DAA' = \angle GFE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle GEF \cong \triangle DAA' (\text{ASA}),$$

$$\therefore DA' = EG = 5.$$

设 $AE = x$,

则由翻折的性质可知: $EA' = x$

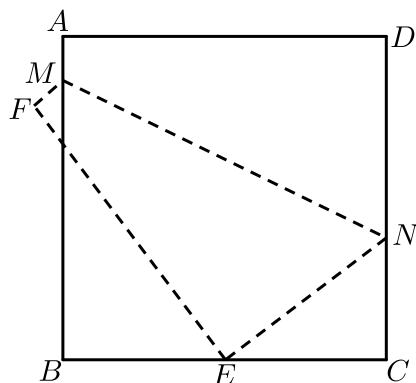
$DE = 12 - x$.

在 $\text{Rt}\triangle EDA'$ 中, $EA'^2 = DE^2 + A'D^2$,

即 $x^2 = (12 - x)^2 + 5^2$, 解得 $x = \frac{169}{24}$.

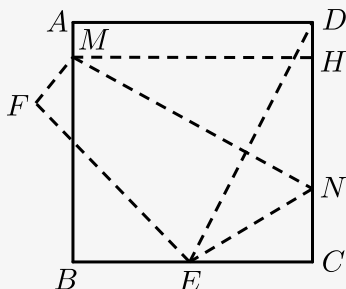
【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

16. 如图, 将边长8cm的正方形 $ABCD$ 折叠, 使点 D 落在 BC 边的中点 E 处, 点 A 落在 F 处, 折痕为 MN , 求折痕 MN 的长度.



【答案】 $4\sqrt{5}\text{cm}$.

【解析】 方法一: 如图1, 作 $MH \parallel BC$,



MN 是折痕, 则 $MN \perp DE$

通过三垂直可证明 $\triangle MHN \cong \triangle DCE$

$\therefore MN = DE$

由勾股定理求出 $DE = 4\sqrt{5}$

所以 $MN = 4\sqrt{5}$ (cm) .

方法二：：延长 NE 交 AB 延长线于点 H ,

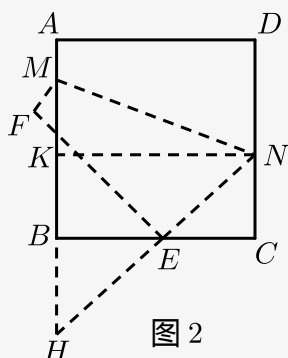


图 2

由题意可知 $NC = 3$, $CE = 4$, $NE = 5$,

$\triangle NEC \cong \triangle HEB$,

$HE = 5$, $HN = 10$,

$\angle DNM = \angle ENM$, $AB \parallel CD$,

$\therefore MH = NH$, $MH = 10$,

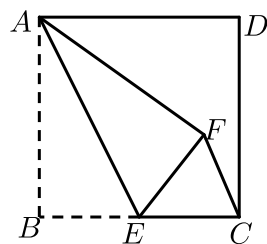
作 $NK \perp AH$, $KB = BH = 3$, $MK = 4$, $KN = 8$,

$\therefore MN = 4\sqrt{5}$ (cm) .

【标注】【知识点】四边形与折叠问题

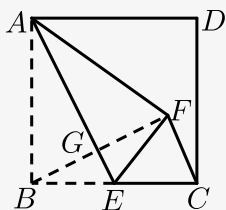
练习

17. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 5 , E 是边 BC 的中点，连接 AE . 沿 AE 折叠该纸片，使点 B 落在 F 点 . 则 CF 的长为 _____ .



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 连接 BF 交 AE 于点 G ,



由折叠可知： AE 垂直平分 BF ，

又 E 是 BC 中点，

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \frac{5}{2}\sqrt{5},$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot BE = \frac{1}{2}AE \cdot BG,$$

$$\therefore BG = \frac{AB \cdot BE}{AE} = \sqrt{5},$$

$$\therefore EG = \sqrt{BE^2 - BG^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

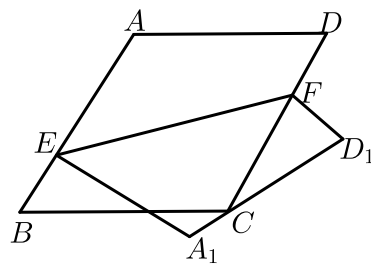
$$\therefore BE = CE, BG = GF,$$

$\therefore EG$ 是 $\triangle BFC$ 的中位线，

$$\therefore CF = 2EG = \sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

18. 如图，折叠菱形纸片 $ABCD$ ，使得 AD 的对应边 A_1D_1 过点 C ， EF 为折痕，若 $\angle B = 60^\circ$ ，当 $A_1E \perp AB$ 时， $\frac{BE}{AE}$ 的值等于（ ）。



A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}-1}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{6}$

D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

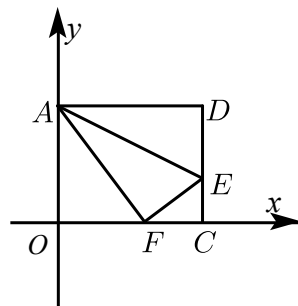
【答案】D

【标注】【知识点】其它翻折问题

二、平面直角坐标系中的翻折

|| 例题

19. 如图，在平面直角坐标系中，将矩形 $AOCD$ 沿直线 AE 折叠（点 E 在边 DC 上），折叠后点 D 恰好落在边 OC 上的点 F 处．若点 D 的坐标为 $(10, 8)$ ，则点 E 的坐标（ ）．



- A. $(4, 10)$ B. $(10, 6)$ C. $(10, 4)$ D. $(10, 3)$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 四边形 $AOCD$ 为矩形， D 的坐标为 $(10, 8)$ ，

$$\therefore AD = BC = 10, DC = AB = 8,$$

$\because$ 矩形沿 AE 折叠，使 D 落在 BC 上的点 F 处，

$$\therefore AD = AF = 10, DE = EF,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOF \text{ 中, } OF = \sqrt{AF^2 - AO^2} = 6,$$

$$\therefore FC = 10 - 6 = 4,$$

$$\text{设 } EC = x, \text{ 则 } DE = EF = 8 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CEF \text{ 中, } EF^2 = EC^2 + FC^2,$$

$$\text{即 } (8 - x)^2 = x^2 + 4^2,$$

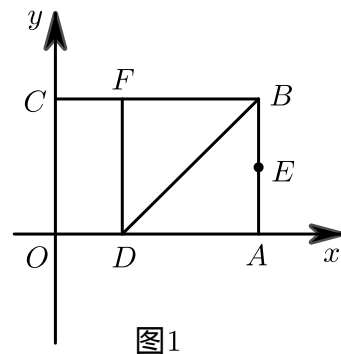
解得 $x = 3$ ，即 EC 的长为 3．

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(10, 3)$ ．

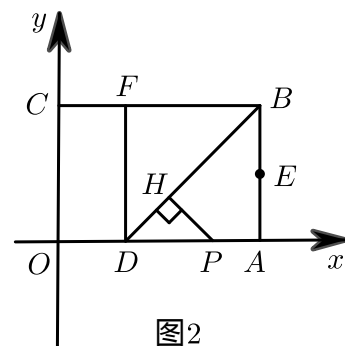
故选：D．

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

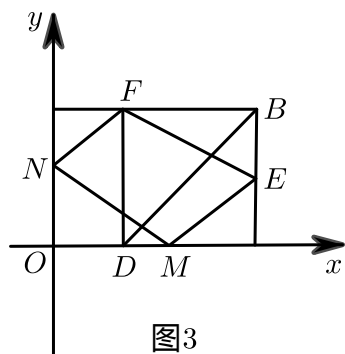
20. 如图1，以矩形 $OABC$ 的顶点 O 为原点， OA 所在的直线为 x 轴， OC 所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，已知 $OA = 3$ ， $OC = 2$ ，点 E 是 AB 的中点，在 OA 上取一点 D ，将 $\triangle BDA$ 沿 BD 翻折，使点 A 落在 BC 边上的点 F 处．



- (1) 直接写出点 E 、 F 的坐标 .
- (2) 如图2, 若点 P 是线段 DA 上的一个动点, 过 P 作 $PH \perp DB$ 于 H 点, 设 OP 的长为 x , $\triangle DPH$ 的面积为 S , 试用关于 x 的代数式表示 S .



- (3) 如图3, 在 x 轴、 y 轴上是否分别存在点 M 、 N , 使得四边形 $MNF E$ 的周长最小? 如果存在, 求出周长的最小值 . (直接写出结果即可)



【答案】 (1) $E(3,1)$, $F(1,2)$

(2) $\frac{1}{4}(x-1)^2$.

(3) $5 + \sqrt{5}$

【解析】 (1) 由题意可求, $AE = 1$, $CF = 1$,

$$\therefore E(3,1), F(1,2) .$$

(2) 如图2

$\therefore$ 将 $\triangle BDA$ 沿 BD 翻折, 使点 A 落在 BC 边上的点 F 处,

$$\therefore BF = AB = 2 ,$$

$$\therefore OD = CF = 3 - 2 = 1,$$

若设 OP 的长为 x ,

$$\text{则}, PD = x - 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = 2, AD = 2,$

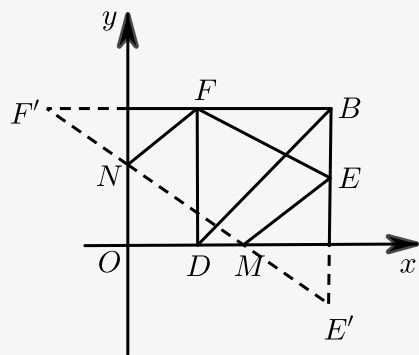
$$\therefore \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle PDH \text{ 中}, PH = DH = DP \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1),$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times DH \times PH = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) = \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

(3) 作点 F 关于 y 轴的对称点 F' , 点 E 关于 x 轴的对称点 E' ,

连接 $E'F'$ 交 y 轴于点 N , 交 x 轴于点 M , 此时四边形 $MNF E$ 的周长最小,



可求, 点 $F(1,2)$ 关于 y 轴的对称点 $F'(-1,2)$,

点 $E(3,1)$ 关于 x 轴的对称点 $E'(3,-1)$,

用两点法可求直线 $E'F'$ 的解析式为: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$,

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时}, y = \frac{5}{4},$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时}, x = \frac{5}{3},$$

$$\therefore N\left(0, \frac{5}{4}\right), M\left(\frac{5}{3}, 0\right),$$

此时, 四边形 $MNF E$ 的周长

$$= E'F' + EF = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+1)^2} + \sqrt{2^2 + 1^2} = 5 + \sqrt{5}.$$

$\therefore$ 在 x 轴、 y 轴上分别存在点 M 、 N , 使得四边形 $MNF E$ 的周长最小, 最小为:

$$5 + \sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

21. 将矩形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中, 顶点 O 为原点, 顶点 C 、 A 分别在 x 轴和 y 轴上. 在 OA 边上选取适当的点 E , 连接 CE , 将 $\triangle EOC$ 沿 CE 折叠, 如图所示.

(1) 若矩形 $OABC$ 的边长 $OA = 8, OC = 10$, 填空.

① 如图1, 当点 O 落在 AB 边上的点 D 处时, 点 E 的坐标为 _____.

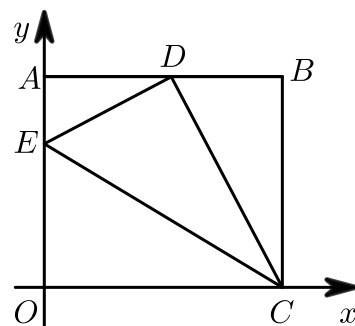


图1

- ② 如图2，当点O落在矩形OABC内部的点D处时，过点E作 $EG \parallel x$ 轴交CD于点H，交BC于点G。设 $H(m, n)$ ，写出含 n 的代数式表示 m 为 _____。

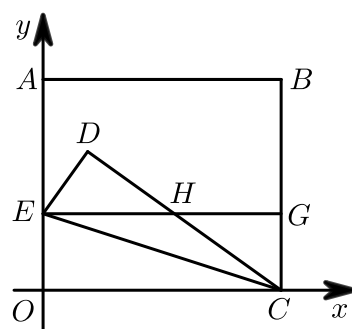


图 2

【答案】(1)① (0, 5)

② $\frac{n^2}{20} + 5$

【解析】(1)① 设 $OE = x$ ，由折叠的性质可知 $DE = OE = x$ ， $CD = OC = 10$ ，

$$\because OE = x, OA = 8,$$

$$\therefore AE = 8 - x,$$

$\because$ 四边形OABC是矩形，

$$\therefore \angle EAD = \angle CBD = 90^\circ (\text{矩形的四个角都是直角}),$$

$$AB = OC = 10, BC = OA = 8 (\text{矩形的对边相等}),$$

$$\therefore \angle DBC = 90^\circ, BC = 8, CD = 10,$$

$$\therefore BD = 6 (\text{直角三角形勾股定理求值}),$$

$$\therefore AD = AB - BD = 4,$$

$$\therefore AD = 4, DE = x, AE = 8 - x, \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore 4^2 + (8 - x)^2 = x^2 (\text{直角三角形勾股定理}),$$

$$\therefore x = 5,$$

$$\therefore OE = 5,$$

$\therefore$ 点E在y轴上，

$\therefore$ 点E的坐标是(0, 5)。

② 根据已知不难得到四边形 $EGCO$ 是矩形,由折叠的性质还可得到

$$\angle OCE = \angle DCE,$$

$$\therefore EG \parallel OC,$$

$$\therefore \angle HEC = \angle OCE \text{ (两直线平行,内错角相等)},$$

$$\therefore \angle OCE = \angle DCE, \angle HEC = \angle OCE,$$

$$\therefore \angle HEC = \angle DCE,$$

$$\therefore EH = CH \text{ (等角对等边)},$$

$$\therefore \text{点} H \text{ 的坐标是 } (m, n),$$

$$\therefore CH = EH = m,$$

$$\therefore HG = 10 - m, CG = n,$$

$$\therefore \angle HGC = 90^\circ, HG = 10 - m, CG = n, CH = m,$$

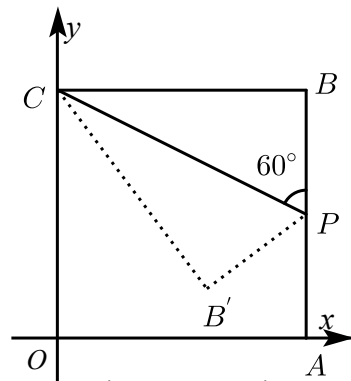
$$\therefore (10 - m)^2 + n^2 = m^2,$$

$$\therefore m = \frac{1}{20} \times n^2 + 5.$$

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题

练习

22. 如图,在平面直角坐标系中,四边形 $OABC$ 是正方形,点 A 的坐标是 $(4, 0)$,点 P 为边 AB 上一点, $\angle CPB = 60^\circ$,沿 CP 折叠正方形,折叠后,点 B 落在平面内点 B' 处,则点 B' 的坐标为().



A. $(2, 2\sqrt{3})$

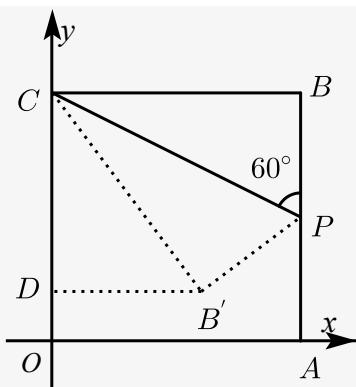
B. $(\frac{3}{2}, 2 - \sqrt{3})$

C. $(2, 4 - 2\sqrt{3})$

D. $(\frac{3}{2}, 4 - 2\sqrt{3})$

【答案】C

【解析】过点 B' 作 $B'D \perp OC$,



$\because \angle CPB = 60^\circ$, $CB' = OC = OA = 4$.

$\therefore \angle B'CD = 30^\circ$, $B'D = 2$.

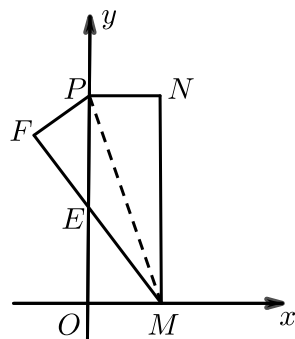
根据勾股定理得 $DC = 2\sqrt{3}$.

$\therefore OD = 4 - 2\sqrt{3}$,

即 B' 点的坐标为 $(2, 4 - 2\sqrt{3})$.

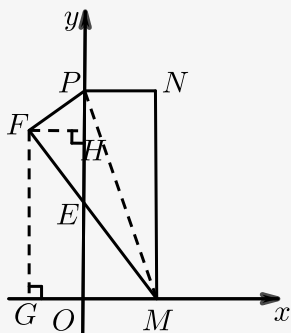
【标注】【知识点】正方形与平面直角坐标系综合

23. 如图，在平面直角坐标系中，长方形 $MNPO$ 的边 OM 在 x 轴上，边 OP 在 y 轴上，点 N 的坐标为 $(3, 9)$ ，将矩形沿对角线 PM 翻折， N 点落在 F 点的位置，且 FM 交 y 轴于点 E ，那么点 E 的坐标为 _____.



【答案】 $(0, 4)$

【解析】 如图，作 $FH \perp OP$ 于 H ， $FG \perp x$ 轴于 G ，



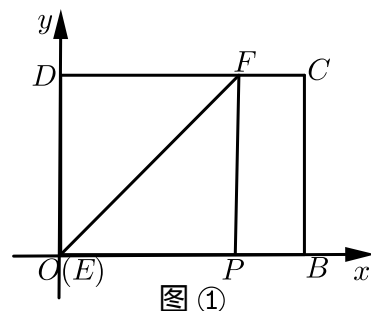
$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(3, 9)$,
 $\therefore OM = 3, MN = 9$,
 根据折叠可知 : $PF = OM$,
 而 $\angle PFE = \angle MOE = 90^\circ$, $\angle FEP = \angle MEO$,
 $\therefore \triangle PFE \cong \triangle MOE$,
 $\therefore OE = FE, OM = PF = 3$,
 设 $OE = x$, 那么 $PE = 9 - x$, $FE = x$,
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle PFE$ 中 , $PE^2 = FE^2 + PF^2$,
 $\therefore (9 - x)^2 = x^2 + 3^2$,
 $\therefore x = 4$,
 $\therefore EF = 4, PE = 5$,
 $\therefore OE = 4$,
 $\therefore E(0, 4)$.

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

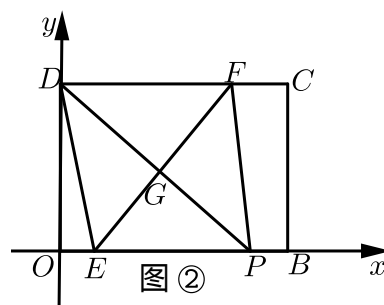
24. 已知矩形纸片 $OBCD$ 的边 OB 在 x 轴上 , OD 在 y 轴上 , 点 C 在第一象限 , 且 $OB = 8$, $OD = 6$. 现将纸片折叠 , 折痕为 EF (点 E, F 是折痕与矩形的边的交点) , 点 P 为点 D 的对应点 , 再将纸片还原 .

(1) 若点 P 落在矩形 $OBCD$ 的边 OB 上 ,

① 如图① , 当点 E 与点 O 重合时 , 求点 F 的坐标 .



② 如图② , 当点 E 在 OB 上 , 点 F 在 DC 上时 , EF 与 DP 交于点 G , 若 $OP = 7$, 求点 F 的坐标 .



【答案】(1)① (6,6).

② $\left(\frac{85}{14}, 6\right)$.

【解析】(1)① ∵折痕为 EF , 点 P 为点 D 的对应点,

$$\therefore \triangle DOF \cong \triangle POF,$$

$$\therefore \angle DOF = \angle POF = 45^\circ,$$

∵四边形 $OBCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ODF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFO = \angle DOF = 45^\circ,$$

$$\therefore DF = DO = 6.$$

∴点 F 的坐标为(6,6).

② ∵折痕为 EF , 点 P 为点 D 的对应点,

$$\therefore DG = PG, EF \perp PD,$$

∵四边形 $OBCD$ 是矩形,

$$\therefore DC \parallel OB,$$

$$\therefore \angle FDG = \angle EPG,$$

$$\therefore \angle DGF = \angle PGE,$$

$$\therefore \triangle DGF \cong \triangle PGE,$$

$$\therefore DF = PE,$$

$$\therefore DF \parallel PE,$$

∴四边形 $DEPF$ 是平行四边形,

$$\therefore EF \perp PD,$$

∴平行四边形 $DEPF$ 是菱形,

设菱形的边长为 x , 则 $DE = EP = x$,

$$\therefore OP = 7,$$

$$\therefore OE = 7 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中, 由勾股定理得 $OD^2 + OE^2 = DE^2$,

$$\therefore 6^2 + (7 - x)^2 = x^2,$$

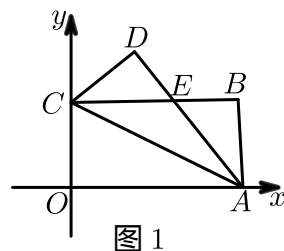
$$\text{解得 } x = \frac{85}{14},$$

$$\therefore DF = \frac{85}{14},$$

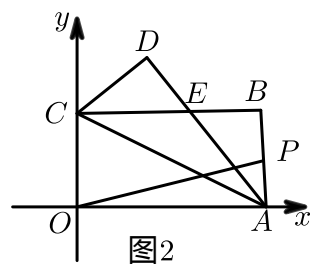
∴点 F 的坐标为 $\left(\frac{85}{14}, 6\right)$.

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

25. 如图1, 长方形 $OABC$ 的边 OA 、 OC 分别在 x 轴、 y 轴上, B 点坐标是 $(8, 4)$, 将 $\triangle AOC$ 沿对角线 AC 翻折得 $\triangle ADC$, AD 与 BC 相交于点 E .



- (1) 求证: $\triangle CDE \cong \triangle ABE$.
- (2) 求 E 点坐标.
- (3) 如图2, 动点 P 从点 A 出发, 沿着折线 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 运动 (到点 O 停止), 是否存在点 P , 使得 $\triangle POA$ 的面积等于 $\triangle ACE$ 的面积, 若存在, 直接写出点 P 坐标, 若不存在, 说明理由.



【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $E(5, 4)$.

(3) 满足条件的点 P 的坐标为 $\left(8, \frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $OABC$ 为矩形,

$$\therefore AB = OC, \angle B = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = OC = AB, \angle D = \angle AOC = \angle B,$$

$$\text{又 } \angle CED = \angle ABE,$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle ABE (\text{AAS}),$$

$$\therefore CE = AE.$$

(2) $\because B(8, 4)$, 即 $AB = 4$, $BC = 8$.

$$\therefore \text{设 } CE = AE = n, \text{ 则 } BE = 8 - n,$$

$$\text{可得 } (8 - n)^2 + 4^2 = n^2,$$

$$\text{解得: } n = 5,$$

$$\therefore E(5, 4).$$

$$(3) \because S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot AB = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle POA} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot y_P = 10 ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 8 \times y_P = 10 ,$$

$$\therefore y_P = \frac{5}{2} ,$$

$$\therefore \text{满足条件的点 } P \text{ 的坐标为 } \left(8, \frac{5}{2}\right) \text{ 或 } \left(0, \frac{5}{2}\right) .$$

【标注】【知识点】矩形与全等综合